

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 11 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$ が極値をとるときの x の値を求めよ。また、そのときの極値を求めよ。
- (2) 座標平面上の曲線 $C: y = |x^2 - 1|$ と、点 $(-1, 0)$ を通る傾き 1 の直線 l を考える。 C と l で囲まれる領域の面積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(4, 2, 2)$ と球面

$$S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$$

を考える。3 点 A , B , C を通る平面を α とする。また、点 P は S 上にあり、以下の 2 つの条件をみたすとする。

- 直線 OP は α と直交する。
- 点 P の y 座標は -1 以下である。

以下の問いに答えよ。

- (1) P の座標を求めよ。
- (2) P から α に下ろした垂線と α の交点を H とする。このとき

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

をみたす実数 s , t を求めよ。

- (3) 四面体 $ABCP$ の体積を求めよ。

【 3 】 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **13** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ が整数となるための、 n がみたすべき必要十分条件を求めよ。

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$0 < r < 1$ とする。表が出る確率が r 、裏が出る確率が $1 - r$ の硬貨を投げ、表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き、裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ、左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。

例えば、3 回硬貨を投げ、結果が順に「裏、表、表」であれば、左から順に「黒、白、白、白、白」と 5 つの玉が並ぶ。

n を自然数とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から n 、 $n + 1$ 、 $n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_1 、 p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から 1、 n 、 $n + 1$ 、 $n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_{n-1} を用いて表せ。
- (3) $n \geq 3$ のとき、 p_n を p_{n-2} 、 p_{n-1} を用いて表せ。
- (4) p_n を求めよ。