

【 1 】 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間内の 5 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1), Q(4, 0, 5)$$

を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル \vec{n} を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき、 $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

(2) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

n を 3 以上の自然数、 α, β を相異なる実数とすると、以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

(2) (1) の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。

(3) (2) の A について、 n と α を固定して、 β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

(3) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **17** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。
- (3) $\textcircled{1}$ をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

(4) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **18** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(C) \text{ 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) \geq h(x) \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x), g(x), h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k, l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。定積分の性質 **ア** を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 $\textcircled{2}$ と定積分の性質 **イ** より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

よって、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義 ① を用いて, 定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて, 次を示せ。

$$a < b \text{ のとき, 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) > 0 \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx > 0$$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式 ② を示せ。
- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また, 不等式 ③ を示せ。

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 **19** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分、 x 軸、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また、 C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。