

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

以下の問いに答えよ。

- (1) 4 次方程式  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$  を解け。
- (2) 複素数平面上の  $\triangle ABC$  の頂点を表す複素数をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき、 $\triangle ABC$  はどのような三角形になるか答えよ。

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$\alpha$  を実数とする。数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha \leq 1$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。
- (2)  $\alpha > 2$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。
- (3)  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。
- (4)  $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 17 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

点  $O$  を原点とする座標平面上の  $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$  とおく。座標平面上のベクトル  $\vec{q}$  に対して、次の条件を考える。

条件 I  $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$  を満たす実数  $r, s$  が存在する。

条件 II  $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$  を満たす整数  $r, s$  が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての  $\vec{q}$  に対して成り立つとする。  $D \neq 0$  であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$  であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル  $\vec{v}, \vec{w}$  で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに  $a, b, c, d$  が整数であるとし、 $x$  成分と  $y$  成分がともに整数であるすべてのベクトル  $\vec{q}$  に対して条件 II が成り立つとする。  $D$  のとりうる値をすべて求めよ。

[ 4 ] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **18** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数  $\cos x$ ,  $\sin x$  については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての  $x, y$  について  $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (B) すべての  $x, y$  について  $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (C)  $f(0) \neq 0$
- (D)  $f(x)$ ,  $g(x)$  は  $x=0$  で微分可能で  $f'(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$

条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  がわかる。以上のことから  $f(x)$ ,

$g(x)$  はすべての  $x$  の値で微分可能で、 $f'(x) = -g(x)$ ,  $g'(x) = f(x)$  が成立する  
① ②  
ことが示される。上のことから  $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$  であることが、

③  
実部と虚部を調べることによりわかる。ただし  $i$  は虚数単位である。よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$  であることが示される。

さらに、 $a, b$  を実数で  $b \neq 0$  とする。このとき条件 (D) をより一般的な

$$(D)' \quad f(x), g(x) \text{ は } x=0 \text{ で微分可能で } f'(0) = a, g'(0) = b$$

におきかえて、条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす  $f(x)$ ,  $g(x)$  はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも、条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、条件 (A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$  を  $p(x)$  に、 $g(x)$  を  $q(x)$  に  
④  
おきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x)$ ,  $q(x)$  がまず求ま

り、このことを用いると  $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ ,  $g(x) = \boxed{\text{イ}}$  が得られる。

- (1) 下線部 ① について,  $f(0) = 1, g(0) = 0$  となることを示せ。
- (2) 下線部 ② について,  $f(x)$  がすべての  $x$  の値で微分可能な関数であり,  $f'(x) = -g(x)$  となることを示せ。
- (3) 下線部 ③ について, 下線部 ①, 下線部 ② の事実を用いることにより,  $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$  となることを示せ。
- (4) 下線部 ④ について, 条件 (B), (D) において,  $f(x)$  を  $p(x)$  に,  $g(x)$  を  $q(x)$  におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり  $p(x)$  と  $q(x)$  が,
- (B) すべての  $x, y$  について  $q(x + y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$
- (D)  $p(x), q(x)$  は  $x = 0$  で微分可能で  $p'(0) = 0, q'(0) = 1$

を満たすことを示せ。また空欄 ,  に入る関数を求めよ。

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 **19** の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$xy$  平面上の曲線  $C$  を、媒介変数  $t$  を用いて次のように定める。

$$x = t + 2 \sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  に接する直線のうち  $y$  軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線  $C$  のうち  $y \leq x$  の領域にある部分と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積を求めよ。