

(1) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間内で、原点 O を中心とする半径 3 の球を S とする。また、点 $P(1, 0, \sqrt{3})$ を考え、 T_1 と T_2 を直線 OP と直交する相異なる 2 つの平面とする。 T_1 と S の共通部分を C_1 、 T_2 と S の共通部分を C_2 とし、次の 2 つの条件をみたすとする。

- C_1 と C_2 はどちらも半径 1 の円である。
- C_1 の中心の z 座標は正で、 C_2 の中心の z 座標は負である。

以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C_1 、 C_2 の中心の座標を求めよ。
- (2) 円 C_1 、 C_2 を底面とする円柱の側面を平面 $z = 0$ で切る。その切り口の曲線の方程式を求めよ。また、その曲線を図示せよ。

(2) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

点 z が複素数平面上の線分

$$z = t + ti \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

の上を動くとき、

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

をみたす複素数 w を表す点が描く軌跡を C とする。ただし、 i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 軌跡 C を複素数平面上に図示せよ。

(2) $t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_1 とし、 $t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_2 とする。このとき、軌跡 C 、線分 OP_1 、線分 OP_2 で囲まれる領域を虚軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、 O は複素数平面の原点である。

(3) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 17 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$0 < r < 1$ とする。表が出る確率が r 、裏が出る確率が $1 - r$ の硬貨を投げ、表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き、裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ、左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。

例えば、3 回硬貨を投げ、結果が順に「裏, 表, 表」であれば、左から順に「黒, 白, 白, 白, 白」と 5 つの玉が並ぶ。

n を自然数とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 $n + 2$ 回硬貨を投げたとき、左から 1, $n, n + 1, n + 2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_{n-1} を用いて表せ。
- (3) $n \geq 3$ のとき、 p_n を p_{n-2}, p_{n-1} を用いて表せ。
- (4) p_n を求めよ。

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 18 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

以下の問いに答えよ。ただし、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてよい。

- (1) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ を示せ。また、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。
- (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち、係数がすべて有理数の 4 次方程式を 1 つ求めよ。また、その 4 次方程式の解をすべて求めよ。
- (3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち、係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しないことを示せ。

(5) (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **19** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

関数

$$f(x) = \int_x^{x+1} \log(4t^2 + 1) dt$$

に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極値をとるときの x の値を求めよ。また、そのときの極値を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ f(x) - f(x-1) \}$ を求めよ。