〔1〕 (45点)

点Oを原点とする2次元xy座標系があり，xy平面内での物体の運動を考える。物体は，大きさが無視できる質点とみなせるとし，y軸の負の向きを鉛直下向きとする重力を受ける。重力加速度の大きさをgとし，摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。また，円周率をπと表す。以下の問いに答えよ。

問 1. まず，図1に示すように，質量mの物体が点A$(0,\ 2L)$および点B$(\pi L,\ 0)\cdot(L > 0)$を通る直線AB上を運動する。点Aを基準とし，A→Bの向きを正として，直線ABに沿った物体の変位をsとする。物体の変位がsであるとき，直線ABの方向はsが増える向き(A→B)を正とし，直線ABの方向が鉛直下向きとなす角度をθとする。時刻$t = 0$で，物体は点A$(s = 0)$にあり，初速度は0（ゼロ）であった。

(1) 時刻tのとき，物体は，変位sの位置にあり，直線ABの方向の加速度αをもつとする。物体の直線ABの方向の運動方程式を書け。ここで，解答に角度θを用いてよい。

(2) 物体が点Bに到達する時刻を求めよ。ただし，解答は，加速度αと角度θを用いずに表せ。

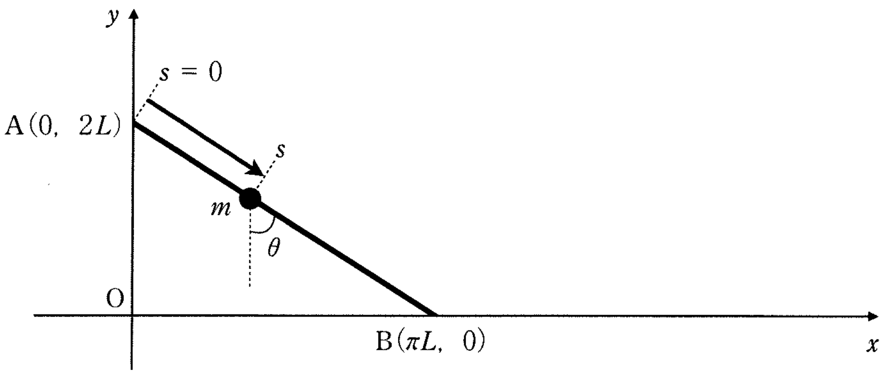

図1

問 2. 次に，図2に示すように，質量 m の物体が点A$(0,\ 2L)$，点B$(\pi L,\ 0)$および点C$(2\pi L,\ 2L)$ $(L > 0)$を通る滑らかな曲線ABCに沿って運動する。点Aを基準とし，A → B → Cの向きを正として，曲線ABCに沿った物体の変位を s とする。物体の変位が s であるとき，その位置での曲線ABCの接線の方向は s が増える向き(A → B → C)を正とし，接線方向が鉛直下向きとなす角度を $\theta(0 \leqq \theta \leqq \pi)$とする。この曲線ABC上で，変位 s と角度 θ の間には次の関係式が成り立つ。

$$s = 4L(1 - \cos\theta) \qquad \cdots①$$

時刻 $t = 0$ で，物体は点A$(s = 0)$にあり，初速度は0（ゼロ）であった。物体は曲線ABC上で，点Bを中心とする往復運動をした。

(1) 時刻 t のとき，物体は，変位 s の位置にあり，曲線ABCの接線方向の加速度 β をもつとする。物体の曲線ABCの接線方向の運動方程式を書け。ここで，解答に角度 θ を用いてよい。

(2) 式①を用いて，**問 2**(1)で求めた運動方程式における，物体が受ける力を変位 s で表せ。

(3) 物体の往復運動の周期を求めよ。

(4) 物体が点Aから点Bに曲線ABCに沿って運動する時間は，**問 1**のように点Aから点Bに直線運動する場合の時間と比べて何倍かを求めよ。

(5) 物体が点Bに初めて到達するときの速さを求めよ。

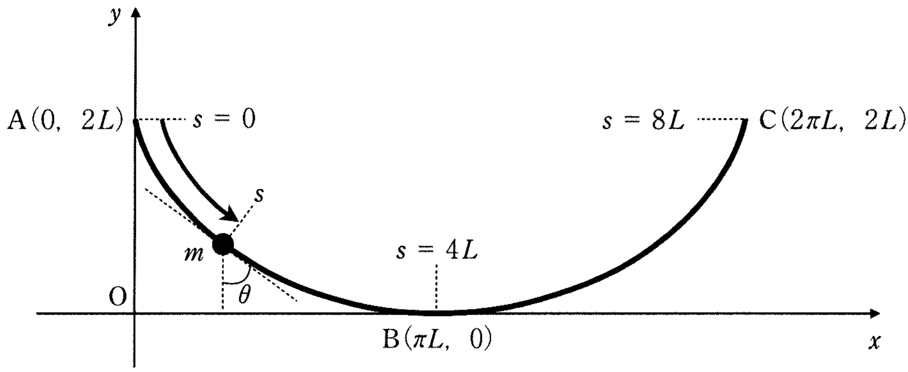

図 2

問 3. 次に，図 3 に示すように，図 2 と同じ曲線 ABC 上の二つの物体の運動を考える。時刻 $t = 0$ で，質量 m の物体は点 A$(0,\ 2L)$ $(L > 0)$に，質量 $2m$ の物体は曲線 BC 上で $y = L$ の位置にあり，二つの物体はともに初速度 0（ゼロ）で同時に運動を始めた。二つの物体は，ある時刻で完全非弾性衝突し，衝突後に合体して一つの物体となった。

(1) 二つの物体が衝突する時刻を求めよ。

(2) 衝突後に一つに合体した物体が到達する最高点の y 座標を求めよ。

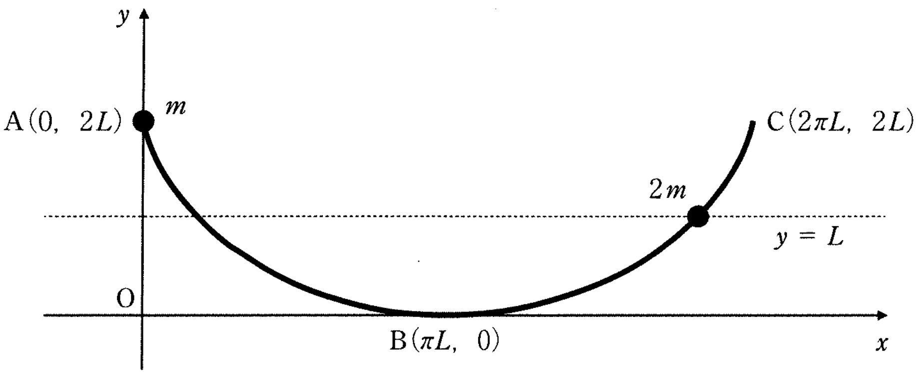

図 3

〔**2**〕 (40点)

以下の問いに答えよ。

問 1. 2枚の極板A, Bを用い, 極板間距離 d を調節可能にすることで電気容量が可変な平行板コンデンサーを作製した。d は十分に小さいとし, 電気容量を d の関数として $C(d)$ と表す。

(1) $C(d)$ のふるまいとして最もふさわしいものを次の①〜④の中から選べ。

① $C(d)$ は d に比例する。　　② $C(d)$ は d^2 に比例する。

③ $C(d)$ は d に反比例する。　　④ $C(d)$ は d^2 に反比例する。

図1(a)のように, この可変コンデンサーに角周波数 ω の交流電圧を加え, 十分に時間がたったのちに回路に流れる電流 I を測定したところ, 図1(b)のようになった。I の符号は極板Aに流れ込む向きを正とし, 交流電流の振幅を I_0 とする。ここで, d は固定しているとする。

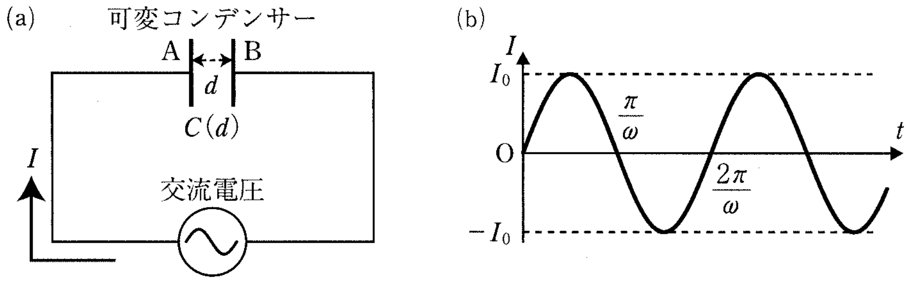

図1

(2)　十分に短い時間 Δt の間に電流 I が極板Aに流れ込むとき，極板Aに蓄えられる電気量は $\Delta Q = I\Delta t$ だけ増加する。極板Aに蓄えられる電気量が最大となる時刻 t_1，およびそのときの電気量 Q_1 を求めよ。ただし，$0 < t_1 \leqq \dfrac{2\pi}{\omega}$ とする。

(3)　時刻 t_1 において極板Bからみた極板Aの電圧 V_1 を $C(d)$，I_0，ω のうち必要なものを用いて表せ。

問 2. 次に導線を用いてコイルを作製した。

(1)　コイルに関する下記の説明のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に入る式を文章中の N，a，S，I，ΔI，Δt，および真空の透磁率 μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

「導線が N 回巻かれた円筒形のコイルを考える。導線の1巻きが囲む円の面積を S とし，コイルの長さは a で十分に長いものとする。このコイルに電流 I を流したとき，コイル内部には $\boxed{\text{ア}}$ の大きさの一様な磁束密度ができ，コイルの導線1巻きを垂直に貫く磁束の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ となる。十分に短い時間 Δt の間に $\Delta I(>0)$ だけ電流の大きさが変化したとすると，コイルの導線1巻きあたり $\boxed{\text{ウ}}$ (>0) の大きさの誘導起電力が生じる。コイル全体ではこの N 倍の誘導起電力が生じるから，コイルの自己インダクタンスは $\boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。」

(2)　コイルの自己インダクタンスを L で表す。角周波数 ω の交流電圧をコイルに加え，振幅 I_0 の交流電流が流れたとする。このとき，コイルの両端にかかる交流電圧の振幅を L，I_0，ω のうち必要なものを用いて表せ。

問 3. **問 1** の静電容量(電気容量)$C(d)$の可変コンデンサーおよび**問 2** の自己インダクタンス L のコイルを用いて，図 2(a)のような共振回路を作製した。この共振回路には電気抵抗 R の抵抗がつながれており，角周波数 ω を変えることのできる交流電圧が加わっている。回路の導線の電気抵抗は無視できるものとする。はじめ，可変コンデンサーの電極間距離(極板間距離)を d_1 に設定した。交流電圧の振幅を一定に保ったまま ω を変化させ，回路に流れる交流電流 I の振幅 I_0 を測定したところ，図 2(b)のようになった。このとき最大の I_0 が得られた角周波数を ω_1 とする。I の符号は図 2(a)の矢印の向きに電流が流れるときを正とし，各素子(可変コンデンサー，コイル，抵抗)の両端にかかる電圧の符号は I の正の向きに電位が降下するときを正とする。

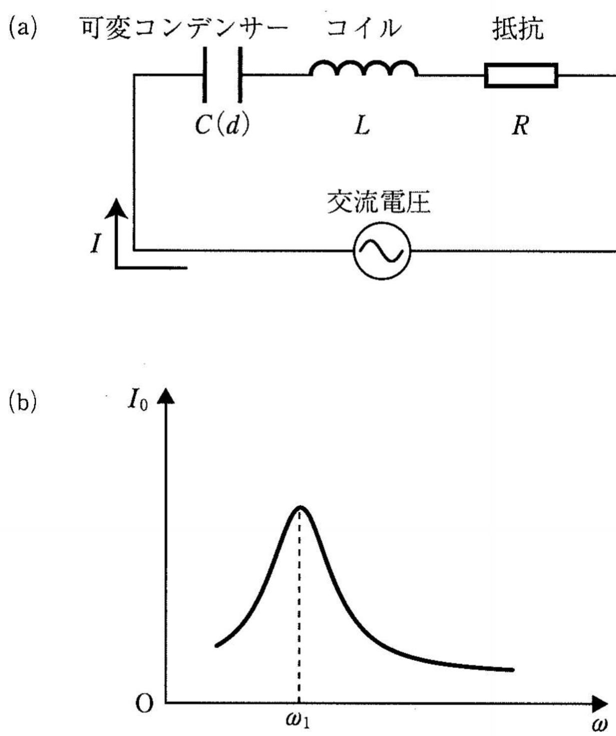

図 2

(1) 角周波数が ω_1 であるとき，コイルの両端にかかる電圧 V_L を測定したところ，図3の一点鎖線のような波形になった。それと同時に可変コンデンサーの両端にかかる電圧 V_C を測定したときの波形を解答紙のグラフ上に実線で描け。

(2) I_0 が最大となる角周波数 ω_1 を $C(d_1)$，L，R のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 角周波数 ω_1 とは異なる角周波数 ω_2 において I_0 が最大となるようにするには可変コンデンサーの電極間距離を d_2 に変える必要がある。d_2 を d_1，ω_1，ω_2 を用いて表せ。

(4) 交流電圧の振幅を一定に保ったまま I_0 の最大値をさらに大きくしたい。そのためには，図2(a)の素子のいずれかを変更する必要がある。何をどのように変更すればよいか10字程度で簡潔に述べよ。ただし，句読点も1字として数える。

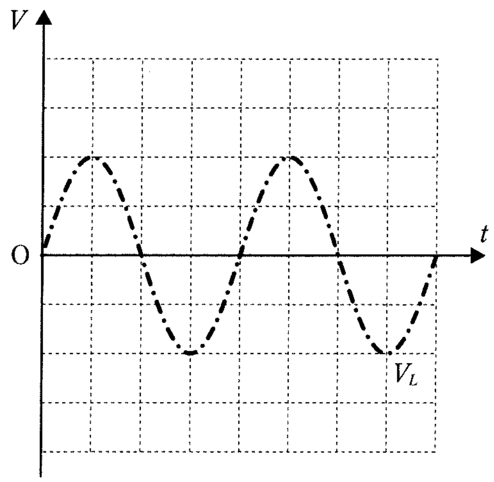

図3

〔3〕 (40点)

以下の問いに答えよ。

問 1. 図1のように厚さの無視できる断熱性の二つのピストン(左からピストン0，ピストン1と呼ぶ)が付いた断面積 S の円筒状の断熱容器がある。内部には，N 個の単原子分子理想気体が封入されている。最初，ピストンはともに静止しており，その間隔は L であった。気体分子の運動は各方向に一様で，速度 $\vec{v}$ の2乗の平均が $\overline{v^2}$ であった。この状態から，ピストン1を固定したまま，ピストン0のみを x 軸の正の向きに速さ $v_0(\ll \sqrt{\overline{v^2}})$ で距離 $\Delta x(\ll L)$ だけ動かす。気体1分子の質量を m として，重力の影響は無視できるとする。ピストンの表面は x 軸に垂直であり，気体分子はピストンや容器の壁と弾性衝突する。以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{キ}}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\text{ウ}}$ ，$\boxed{\text{エ}}$ については，$\Delta x \ll L$ で成り立つ以下の近似式を用いて答えよ。

$$\left(1+\frac{\Delta x}{L}\right)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha\frac{\Delta x}{L} \qquad (\alpha \text{は実数})$$

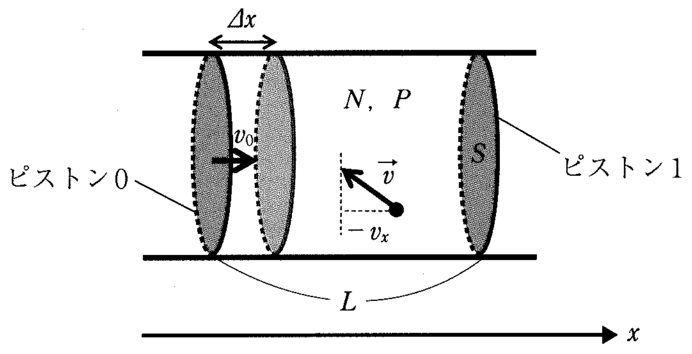

図1

最初，速度の x 成分が $-v_x$ $(v_x \gg v_0 > 0)$ であった気体分子が，移動中のピストン 0 に衝突したとすると，衝突後の速度の x 成分は $v_x +$ $\boxed{\quad ア \quad}$ となる。したがって，速度の x 成分の大きさはピストン 0 に衝突するたびに $\boxed{\quad ア \quad}$ だけ増加する。気体分子間の衝突が無視できるとし，また，$\Delta x \ll L$，$v_0 \ll v_x$ であるから，この気体分子が x 方向に容器内を往復する時間は $\dfrac{2L}{v_x}$ で近似できる。ピストン 0 を動かし終わるまでにこの気体分子はピストン 0 に $\dfrac{\Delta x\, v_x}{2 v_0 L}$ 回衝突するため，ピストン 0 を止めた直後の速度の x 成分の大きさは $\boxed{\quad イ \quad}$ $\times\, v_x$ となる。

ピストン 0 を動かして気体を圧縮する間の気体分子間の衝突を無視すると，x 軸に垂直で，直交する 2 方向の気体分子の速度成分の 2 乗の平均はそれぞれ $\dfrac{\overline{v^2}}{3}$ のままで変化しない。一方，気体分子の速度の x 成分の 2 乗の平均はピストン 0 を止めた直後には $\boxed{\quad ウ \quad}$ $\times \dfrac{\overline{v^2}}{3}$ になる。したがって，容器内部の N 個の気体分子が持つ運動エネルギーは圧縮前と比べて $\boxed{\quad エ \quad}$ $\times\, \overline{v^2}$ だけ増加する。

実際には気体分子間の弾性衝突によって運動は各方向に一様となり，以下の関係が成り立つ。

$$(\text{気体の圧力}) \times (\text{気体の体積}) = \frac{2}{3} \times (\text{全気体分子の運動エネルギー}) \qquad \cdots ①$$

圧縮前の気体の圧力を P，圧縮後の圧力を $P + \Delta P$ とする。$\Delta P \times \Delta x$ に比例する項は極めて小さいために無視すると，圧縮の前後での式①の左辺の変化量は，S，P，L を用いて $\boxed{\quad オ \quad}$ $\times\, \Delta P -$ $\boxed{\quad カ \quad}$ $\times\, \Delta x$ で与えられる。式①の右辺は圧縮の前後で $\dfrac{2}{3} \times$ $\boxed{\quad エ \quad}$ $\times\, \overline{v^2}$ だけ増加しているから，以下の関係式が得られる。

$$\frac{\Delta P}{P} = \boxed{\quad キ \quad} \times \frac{\Delta x}{L} \qquad \cdots ②$$

問 2. 式②を満たすように気体の一部がわずかな断熱圧縮と膨張を繰り返して振動すると，疎密波(縦波)が発生する。これが音波である。その速度を以下の手順で近似的に求めよう。

図2(a)のように，断面積 S で無限に長い円筒の内部に，質量と厚さが無視できる無数のピストンが設置されている。ピストンで区切られたそれぞれの空間には，**問 1** と同じように N 個の単原子分子理想気体(1分子の質量 m)が断熱された状態で封入されている。静止状態において各ピストンは間隔 L で並んでおり，このときの気体の圧力を P とする。ピストンは左端から順番にピストン0，ピストン1，… と呼び，ピストン n とピストン $n+1$ で区切られた領域を空間 n($n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)とする。図2(b)のように，右向きを正の方向として，ピストン n の静止位置からの変位を x_n とする。また，空間 n 内における気体の圧力の P からの変化量を $\varDelta P_n$ とする。図のようにピストン0を，$x_0 = A\sin(\omega t)$ のように角振動数 ω，振幅 A ($\ll L$)で変位させると，その振動が右側のピストンに次々と伝わる。以下の空欄 $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。ただし，気体やピストンの運動に伴う摩擦，および重力による影響は無視し，**問 1** で求めた $\boxed{\text{キ}}$ の値を γ として，式②と同様の関係式

$$\frac{\varDelta P_n}{P} = -\gamma\frac{x_{n+1} - x_n}{L}$$

が成り立つことを用いてよい。

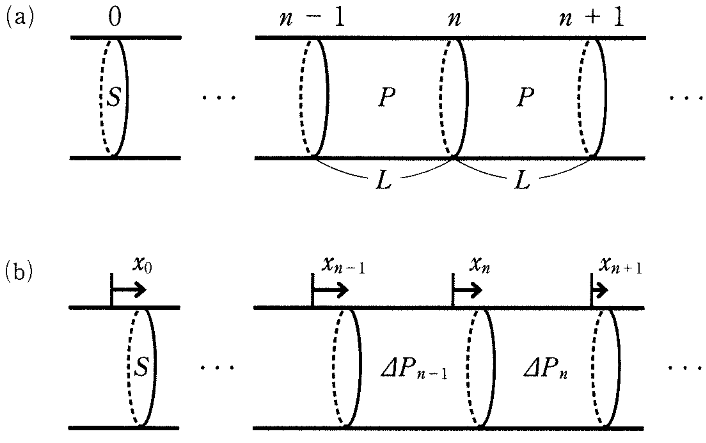

図 2

右向きに波長$\lambda(\gg L)$の波が伝搬する場合を考える。このときピストンnの変位は$x_n = A\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi nL}{\lambda}\right)$のように表される。ピストン$n(\geqq 1)$に加わる力は，$S$，$\Delta P_n$，$\Delta P_{n-1}$を用いて $\boxed{\quad ク \quad}$ で与えられる。また，$L \ll \lambda$では空間n内に存在するN個の気体分子はピストンnとともに運動するとする。ピストン$n(\geqq 1)$の加速度をa_nとすると，ピストンnとともに運動する気体の運動方程式は，γ，P，S，Lを用いて，

$Nma_n = \boxed{\quad ケ \quad} \times (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$と書ける。三角関数の公式

$$\begin{aligned} \sin(\phi \pm \phi_0) &= \sin\phi\cos\phi_0 \pm \cos\phi\sin\phi_0 \\ \cos(\phi \pm \phi_0) &= \cos\phi\cos\phi_0 \mp \sin\phi\sin\phi_0 \end{aligned} \qquad \text{（複合同順）}$$

を用いれば，$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 2 \times \left\{\cos\left(\boxed{\quad コ \quad}\right) - 1\right\} \times x_n$と書けるため，ピストン$n$とともに運動する気体の運動方程式は，

$Nma_n = -4 \times \boxed{\quad ケ \quad} \times \sin^2\left(\dfrac{\boxed{\quad コ \quad}}{2}\right) \times x_n$となる。これは単振動を表す。$\lambda \gg L$であることから$\sin\left(\dfrac{\pi L}{\lambda}\right) \fallingdotseq \dfrac{\pi L}{\lambda}$の近似を用いると，この気体中を伝搬する音波の速さは，γ，P，S，L，N，mを用いて $\boxed{\quad サ \quad}$ と表される。